

การหาพารามิเตอร์ไม่เชิงเส้นของระบบระดับความเสรีขั้นเดียว  
ที่มีตัวหน่วงแบบของเหลวหนืด

NONLINEAR PARAMETER EXTRACTION OF SDOF  
VISCOUS DAMPING SYSTEM

ปริญญา บุญมาเลิศ<sup>1</sup> และ ธนู ฉุยฉาย<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup>อาจารย์, สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษมบัณฑิต

1761 ถนนพัฒนาการ เขตสวนหลวง กรุงเทพฯ 10250

<sup>1</sup>parinya.boo@kbu.ac.th, <sup>2</sup>thanuchouychai@gmail.com

Parinya Boonmalet<sup>1</sup> and Thanu Chouychai<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup>Lecturer, Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering,

Kasem Bundit University 1761 Pattanakarn Rd. Suanluang Bangkok 10250, Thailand,

<sup>1</sup>parinya.boo@kbu.ac.th, <sup>2</sup>thanuchouychai@gmail.com

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้ได้แสดงวิธีการหาพารามิเตอร์ไม่เชิงเส้นของสปริงแบบควอดราติก โดยแสดงการคำนวณจากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ พบว่าผลจากการคำนวณมีความถูกต้องแม่นยำมากโดยมีเปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดจากการคำนวณอยู่ในระดับ  $10^{-17}$  % ซึ่งเป็นผลมาจากการทำการประสานอย่างเร็วโดยใช้การแปลงของฟูรีเยร์แบบตรงและผกผัน ส่วนการทดลองกับระบบจริงได้ทำการหาพารามิเตอร์ไม่เชิงเส้นของไม้ซีดา ที่ใช้ในการทำกัต้าร์ไฟฟ้า โดยทำการวัดสัญญาณสามครั้งโดยที่แต่ละครั้งจะใส่แรงแบบดลที่มีขนาดแอมพลิจูดแตกต่างกัน หลังจากนั้นนำสัญญาณที่ได้มาคำนวณหาพารามิเตอร์แบบไม่เชิงเส้นของสปริง ได้ค่าความไม่เชิงเส้นเป็น  $\beta = 5.4275 \times 10^{-9}$  N/m<sup>2</sup> ซึ่งมีค่าต่ำมากสอดคล้องกับทางทฤษฎีเนื่องจากแรงของสปริงจะแปรเปลี่ยนตามทิศทางการเคลื่อนที่ แต่  $\beta$  คงอยู่กับเทอม  $y^2(t)$  จึงทำให้แรงไม่เปลี่ยนทิศทางการเคลื่อนที่ของมวล

คำสำคัญ: พารามิเตอร์แบบไม่เชิงเส้น, การประสาน, การแปลงของฟูรีเยร์

## ABSTRACT

This research presents the method for finding nonlinear parameters of quadratic springs by presenting calculations of mathematical models. It is found that the calculation results are very accurate, with the calculation error percentage of  $10^{-17}$  % which comes as a result of fast convolution by using the direct and inverse Fourier transforms. In the experiment with the actual system, the nonlinear parameters of cedar wood, the wood that is used in making electric guitars, were determined by measuring the signal three times with each impulse being loaded with different amplitudes. Then, the obtained signal is calculated for the nonlinear parameters of the spring. The nonlinearity is very low at  $\beta = 5.4275 \times 10^{-9}$  N/m<sup>2</sup> which is consistent with the theory because the force of the spring will change according to the direction of movement, but  $\beta$  is multiplied by the term  $y^2(t)$ , so the force does not change in the direction of the motion of the mass.

**KEYWORDS:** nonlinear parameters, convolution, Fourier transform

### 1. บทนำ

ในทางปฏิบัติการหาพารามิเตอร์ไม่เชิงเส้นของระบบมีหลายวิธี ซึ่งแต่ละวิธีมีข้อดีแตกต่างกันไป แต่ยังไม่มียุทธศาสตร์ที่เฉพาะเจาะจงเนื่องจากระบบแบบไม่เชิงเส้นมีหลายรูปแบบ งานวิจัยนี้จะนำเสนอวิธีการหาพารามิเตอร์ไม่เชิงเส้นของสปริงไม่เชิงเส้นกำลังสอง (Quadratic spring) โดยจะคำนวณการหาพารามิเตอร์ในโดเมนของเวลาของระบบระดับความเสถียรขึ้นเดียวที่มีตัวหน่วงแบบของเหลวหนืด (Viscous damping)

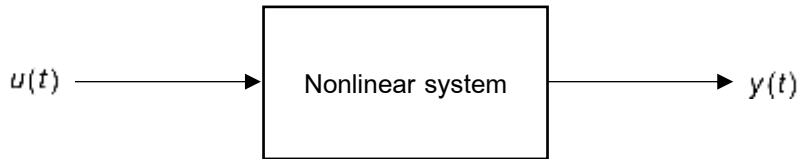
### 2. งานที่เกี่ยวข้อง

Boonmalert and Chouychai [1] ได้นำเสนอวิธีการหาฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบไม่เชิงเส้นที่มีตัวหน่วงแบบฮิสเทอเรซิส (Hysteresis damping) แต่เนื่องจากระบบแบบนี้มีสัญญาณออกเป็นเชิงซ้อน ซึ่งจะทำให้ไม่สมจริงและยากที่จะนำไปประยุกต์ใช้กับงานจริง

Chouychai [2] ได้แสดงให้เห็นว่า ฟังก์ชันถ่ายโอนอันดับที่สองและสามของระบบระดับความเสถียรขึ้นเดียวที่มีสปริงไม่เชิงเส้นแบบควอดราติกของระบบที่มีตัวหน่วงแบบของเหลวหนืดและระบบที่มีตัวหน่วงแบบฮิสเทอเรซิสมีรูปแบบที่เหมือนกัน แต่ระบบที่มีตัวหน่วงแบบของเหลวหนืดจะมีสัญญาณออกเป็นค่าจริง (Real)

### 3. ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

ระบบไม่เชิงเส้นระดับความเสถียรขึ้นเดียวที่มีตัวหน่วงแบบของเหลวหนืดและมีสปริงแบบควอดราติก ที่มีสัญญาณเข้าเป็น  $u(t)$  จะมีสัญญาณออกของระบบเป็น  $y(t)$  ดังแสดงในรูปที่ 1 สัญญาณออกสามารถเขียนอยู่ในรูปแบบอนุกรมของวอลเตอร์รา (Volterra series) [3] ได้ดังนี้



รูปที่ 1 สัญญาณเข้าและสัญญาณออกของระบบ

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n(t) \quad (1)$$

การตอบสนองลำดับที่  $n$  เขียนได้เป็น

$$y_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} h_n(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) \prod_{i=1}^n u(t - \tau_i) d\tau_i \quad (2)$$

โดยที่  $h_n(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)$  เป็นสัญญาณการตอบสนองแบบตล (impulse response) ลำดับที่  $n$

ถ้า  $u(t)$  เป็นสัญญาณเข้าของระบบ สำหรับระบบไม่เชิงเส้นที่มีสัญญาณเข้าครั้งที่  $i$  ใด ๆ เป็น

$$u_i(t) = F_i f(t) \quad (3)$$

โดยที่  $F_i$  เป็นแอมพลิจูดของสัญญาณเข้าครั้งที่  $i$  จะทำให้ได้สัญญาณออกของระบบครั้งที่  $i$  เป็น

$$y^{(i)}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_i^n y_n(t) \quad (4)$$

สมการ (4) สามารถเขียนอยู่ในรูปของเมตริกซ์ [4] ได้ดังนี้

$$\begin{Bmatrix} y^{(1)}(t) \\ y^{(2)}(t) \\ \vdots \\ y^{(n)}(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 & F_1^2 & \dots & F_1^n \\ F_2 & F_2^2 & \dots & F_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ F_n & F_n^2 & \dots & F_n^n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{Bmatrix} \quad (5)$$

หรือ

$$\{y^{(i)}(t)\} = [F] \{y_n(t)\} \quad (6)$$

และสัญญาณออกลำดับที่  $n$  ไต ๆ จะหาได้จาก

$$\{y_n(t)\} = [F]^{-1} \{y^{(i)}(t)\} \quad (7)$$

ระบบระดับความเสีร้ชั้นเดียวที่มีสปริงไม่เชิงเส้นแบบควอดราติกที่มีตัวหน่วงแบบฮิสเทอเรซิส และตัวหน่วงแบบของเหลวหนืด จะมีฟังก์ชันถ่ายโอนอันดับที่สองเหมือนกัน [1, 2] ดังนั้นในที่นี้จะพิจารณาาระบบระดับความเสีร้ชั้นเดียวที่มีตัวหน่วงแบบของเหลวหนืด เพื่อให้ได้สัญญาณออกของระบบเป็นเทอมแท้จริง โดยระบบระดับความเสีร้ชั้นเดียวที่มีสปริงไม่เชิงเส้นแบบควอดราติกและมีตัวหน่วงแบบของเหลวหนืดเป็นดังต่อไปนี้

$$m\ddot{y}(t) + c\dot{y}(t) + ky(t) + \beta y^2(t) = u(t) \quad (8)$$

เมื่อสัญญาณออกของระบบถูกแทนที่ด้วยอนุกรมของวอลเตอรัรจากสมการที่ (1) จะได้

$$m \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{y}_n(t) + c \sum_{n=1}^{\infty} \dot{y}_n(t) + k \sum_{n=1}^{\infty} y_n(t) + \beta \sum_{n=1}^{\infty} y_n^2(t) = u(t) \quad (9)$$

เทียบสัมประสิทธิ์กำลังหนึ่งจะได้

$$m\ddot{y}_1(t) + c\dot{y}_1(t) + ky_1(t) = u(t) \quad (10)$$

สมการที่ (10) สามารถเขียนอยู่ในรูปของโอเปอเรเตอร์ได้เป็น

$$H_1^{-1}[y_1(t)] = u(t) \quad (11)$$

หรือ

$$y_1(t) = H_1[u(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\tau)u(t-\tau)d\tau \quad (12)$$

ในทำนองเดียวกันเมื่อเทียบสัมประสิทธิ์กำลังสองจะได้

$$m\ddot{y}_2(t) + c\dot{y}_2(t) + ky_2(t) = -\beta y_1^2(t) \quad (13)$$

หรือ

$$y_2(t) = -\beta H_1[y_1^2(t)] = -\beta \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\tau)y_1(t-\tau)y_1(t-\tau)d\tau \quad (14)$$

สำหรับสัญญาณออกลำดับที่สามได้

$$y_3(t) = -\beta H_1[y_1(t)y_2(t)] \quad (15)$$

เมื่อพิจารณาสัญญาณออกลำดับที่สองจะเห็นว่าพารามิเตอร์ไม่เชิงเส้น  $\beta$  เป็นตัวคูณอยู่ภายนอกของฟังก์ชันเปรียบเหมือนเป็นอัตราขยาย (Gain) ซึ่งจะสามารถหาออกมาได้โดยง่าย จากความสูงของ  $y_2(t)$  แต่ในทางปฏิบัติสัญญาณรบกวนอาจทำให้เกิดความผิดพลาดได้ เพื่อเป็นการลดความผิดพลาดที่เกิดจากสัญญาณรบกวนจะทำการคำนวณหา  $\beta$  โดยใช้ระเบียบวิธีถดถอย

กำลังสองน้อยที่สุด (Least square regression method) [5] จากสมการ (14) เมื่อคำนวณ  $y_2(t)$  ด้วยวิธีการประสานเชิงตัวเลข (Numerical convolution) ของสัญญาณทั้ง  $N$  จุดได้เป็น

$$y_2(k) = -\beta \sum_{n=0}^k h_1(n)y_1^2(k-n) = -\beta y_{2n}(k) \quad (16)$$

ผลรวมของเศษเหลือกำลังสองคือ

$$S = \sum_{k=0}^N e^2(k) = \sum_{k=0}^N [y_2(k) + \beta y_{2n}(k)]^2 \quad (17)$$

และ  $\beta$  หาได้จาก  $\frac{\partial S}{\partial \beta} = 0$  ซึ่งจะหาค่าของ  $\beta$  ได้จาก

$$\beta = -\frac{\sum_{k=0}^N y_2(k)y_{2n}(k)}{\sum_{k=0}^N y_{2n}^2(k)} \quad (18)$$

#### 4. การทดสอบ

การตรวจสอบความถูกต้องของทฤษฎีสามารถทำได้โดยกำหนดพารามิเตอร์ของสมการ (8) เป็น  $m = 1$  kg,  $c = 2$  Ns/m,  $k = 100$  N/m และ  $\beta = 2$  N/m<sup>2</sup> ซึ่งจะทำได้  $\omega_n = 10$  rad/s และ  $\zeta = 0.1$  ส่วนแรงที่กระทำกับระบบกำหนดเป็น

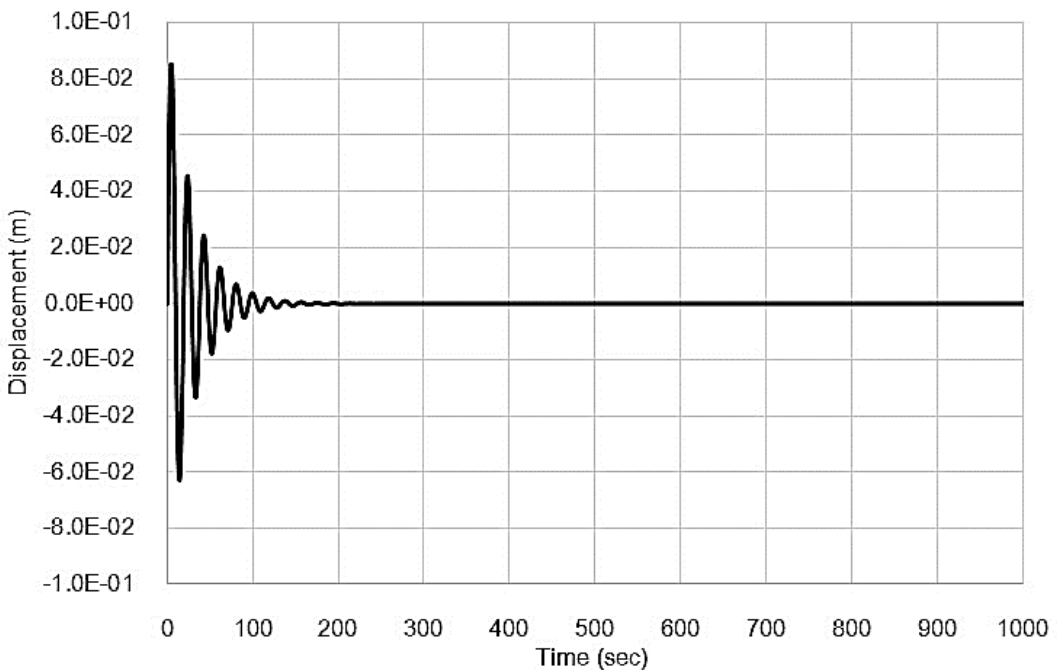
$$u(t) = F_i \delta(t) = \begin{cases} F_i, & t=0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases} \quad (19)$$

โดยกำหนดค่า  $F_1 = 10$  N,  $F_2 = 20$  N และ  $F_3 = 30$  N แล้วแทนในสมการที่ (8) จากนั้นใช้ระเบียบวิธีรุงเง-คุดตา (Runge-Kutta's method) [5] คำนวณหาสัญญาณออกของระบบ แล้วจึงนำไปแทนในสมการที่ (5) จะทำให้ได้สัญญาณออกของระบบสามลำดับตามอนุกรมของวอลเตอร์รา คือ  $y_1(t)$ ,  $y_2(t)$  และ  $y_3(t)$  โดยสัญญาณออกทั้งสามลำดับของระบบนั้นแสดงในรูปที่ 2-4 จากนั้นนำสัญญาณออก  $y_1(t)$  และ  $y_2(t)$  แทนลงในสมการที่ (18) เพื่อคำนวณหาพารามิเตอร์ไม่เชิงเส้นของสปริง  $\beta$

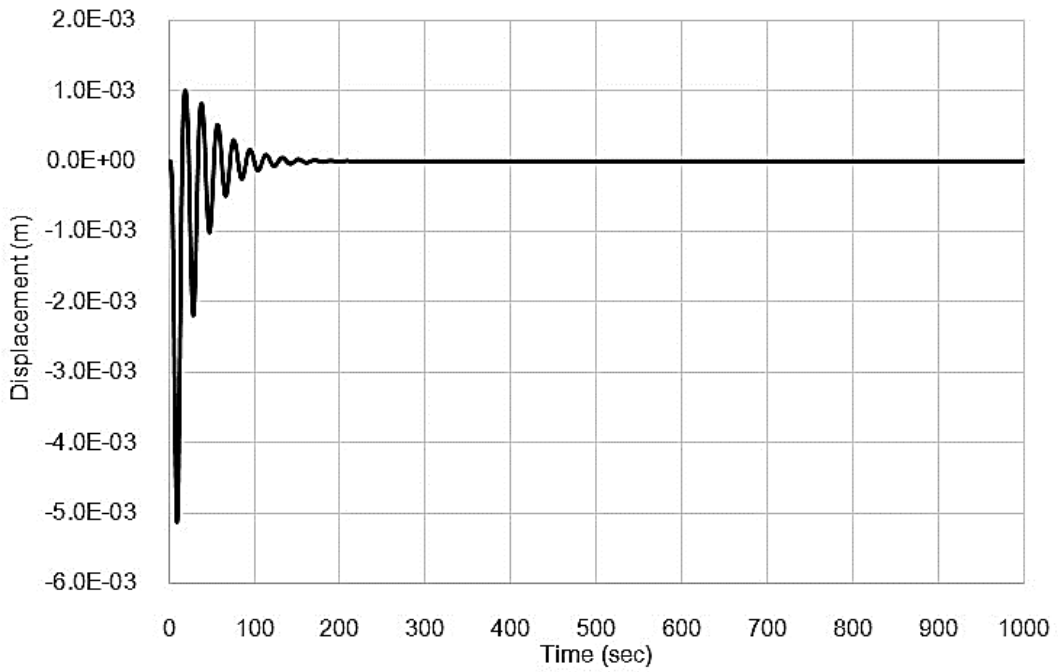
จากการคำนวณได้ค่า  $\beta = 2 \text{ N/m}^2$  ซึ่งมีค่าเท่ากับค่าที่กำหนดในแบบจำลอง จึงมั่นใจได้ว่าวิธีการนี้สามารถใช้งานได้จริง

การทดลองกับระบบจริงเพื่อวัดพารามิเตอร์ไม่เชิงเส้นของไม้ซีดาร์ (Cedar wood) ที่ใช้สำหรับทำกีตาร์ไฟฟ้า โดยนำไม้ซีดาร์วางบนแผ่นโฟมอ่อนแล้วทำการวัดสัญญาณความเร่งของแผ่นไม้ซีดาร์และพิจารณาฐานนิยมแบบอ่อนตัว (Flexible mode) เพียงฐานนิยมเดียว เพื่อให้เป็นระบบแบบระดับความเสถียรขึ้นเดียว ส่วนแรงที่ใส่ให้ระบบใช้แรงที่ได้จากการตีด้วยค้อน โดยพยายามให้แรงเป็นสัญญาณแบบดล เครื่องมือที่ใช้ในการทดลองได้แสดงในรูปที่ 5 โดยมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

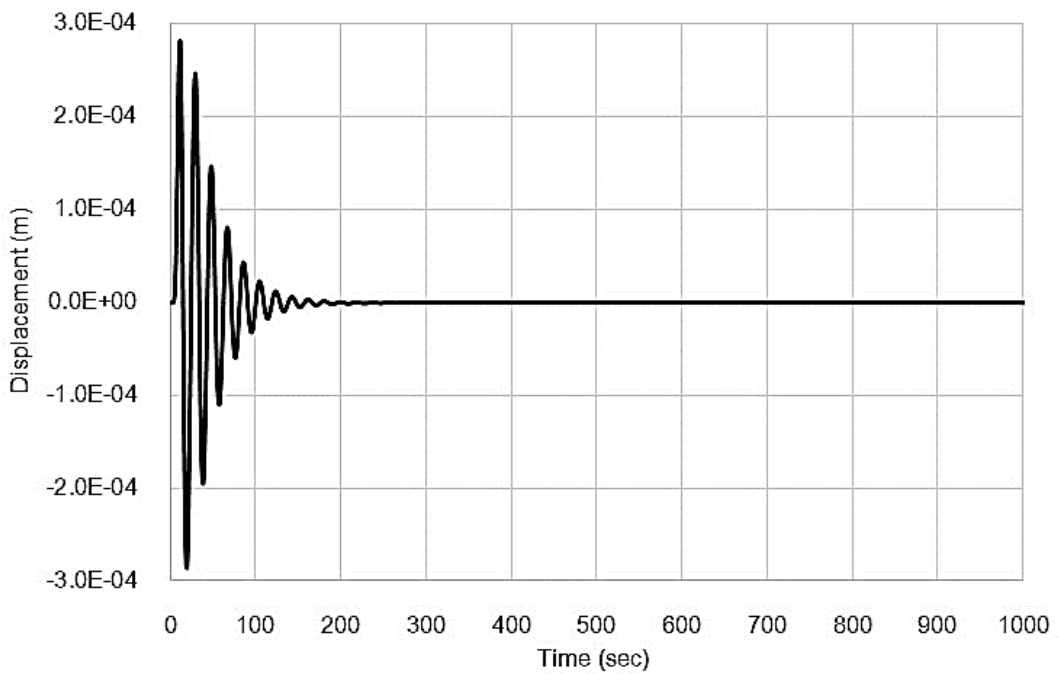
- Force Transducer ICP Impact Hammer 086C03, Accelerometer Type 4507B001 B&K
- Signal Conditioner A/D NI USB-4431 (National Instrument)
- โปรแกรม MATLAB และ คอมพิวเตอร์ PC ใช้ในการอ่านข้อมูลจาก Signal Conditioner NI
- ชิ้นงานที่ใช้ในการทดสอบเป็นไม้ซีดาร์ ขนาด 470 mm X 357 mm หนา 44 mm



รูปที่ 2 สัญญาณออกลำดับที่หนึ่งของระบบ



รูปที่ 3 สัญญาณออกลำดับที่สองของระบบ



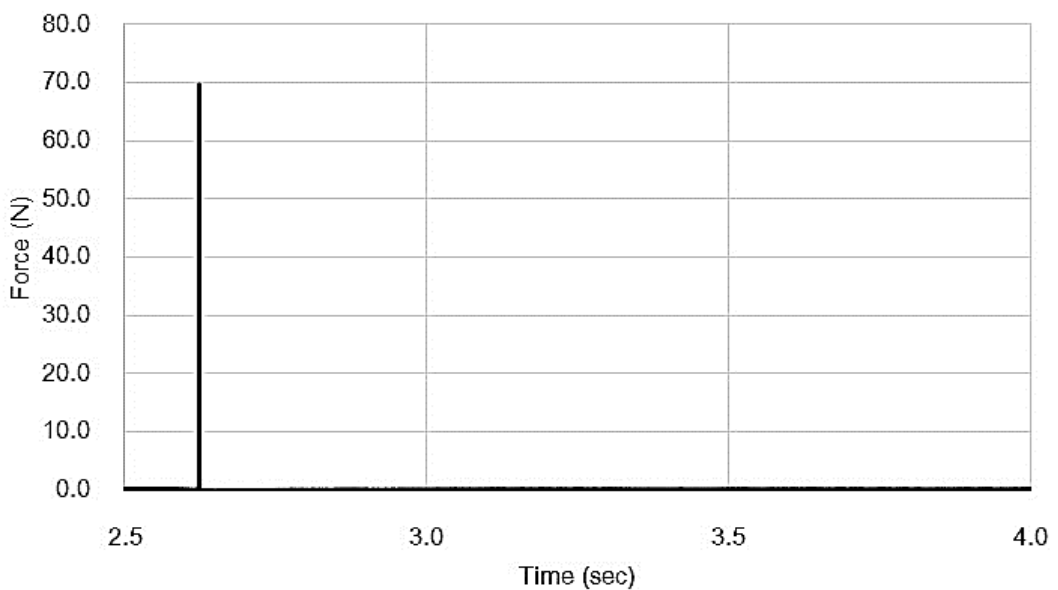
รูปที่ 4 สัญญาณออกลำดับที่สามของระบบ



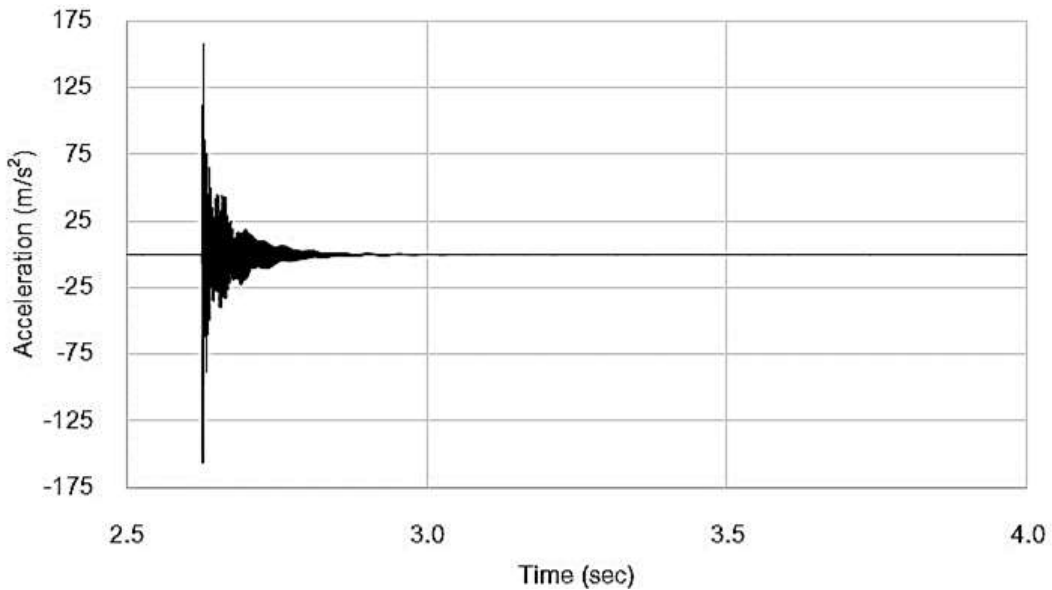


รูปที่ 5 เครื่องมือวัดสัญญาณและระบบที่ทำการทดลอง

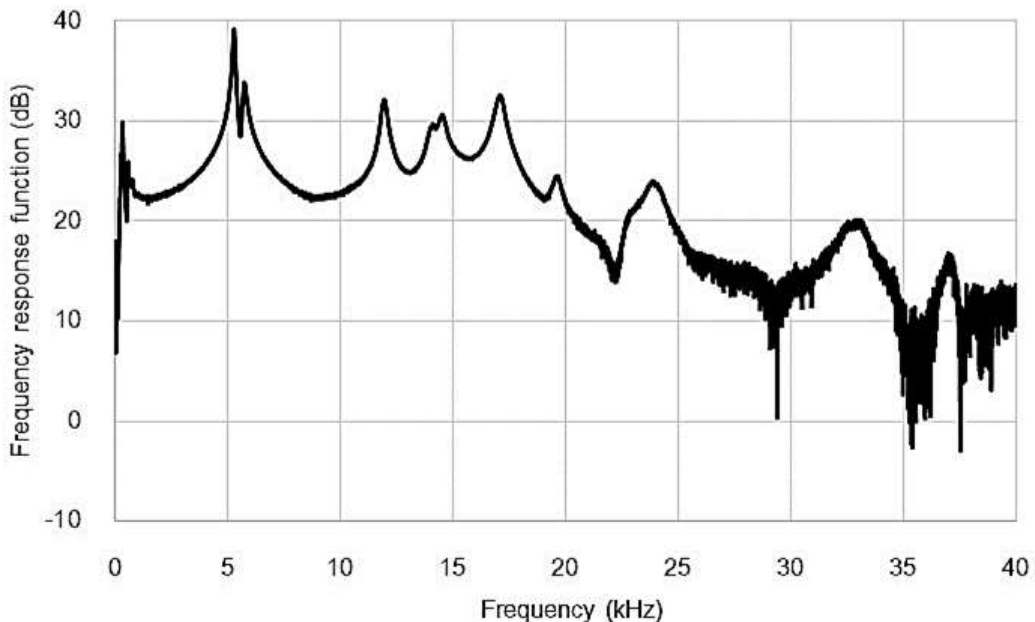
ในการทดลอง ได้ทำการวัดสัญญาณสามครั้งและบันทึกค่าไว้ทั้งสัญญาณเข้าและสัญญาณออก ตัวอย่างสัญญาณออกและสัญญาณเข้าของระบบที่ทำการวัดสัญญาณ แสดงในรูปที่ 6-7 ในส่วนแอมพลิจูดของแรงทั้งสามที่วัดได้คือ  $F_1 = 69.53 \text{ N}$  ,  $F_2 = 110.98 \text{ N}$  และ  $F_3 = 127.45 \text{ N}$



รูปที่ 6 สัญญาณเข้าของระบบในการทดลองเคาะไม้ซัดาร์



รูปที่ 7 สัญญาณออกของระบบในการทดลองเคาะไม้ซี้ดาร์



รูปที่ 8 สัญญาณออกของระบบในเทอมของความถี่

จากรูปที่ 8 เป็นสัญญาณออกของระบบในเทอมของความถี่ จะเห็นว่าที่ประมาณ 6 kHz เป็นจุดที่มีฐานนิยมชัดเจนนมากแต่เนื่องจากมีฐานนิยมข้างเคียงที่ความถี่ประมาณ 7 kHz ปรากฏอยู่ และเนื่องจากวิธีการหาพารามิเตอร์ไม่เชิงเส้นของงานวิจัยนี้เป็นแบบ ระดับความถี่ขึ้นเดียว จึง

ไม่สามารถเอาสัญญาณในช่วงความถี่ประมาณ 6 kHz มาใช้ได้เนื่องจากจะมีความผิดพลาดจากฐานนิยมข้างเคียงที่ชิดกันมากได้ ด้วยเหตุนี้จึงเลือกฐานนิยมที่อยู่ในช่วงความถี่ 10-12 kHz มาใช้ในการคำนวณเพราะว่าไม่มีฐานนิยมข้างเคียงที่อยู่ชิดกัน การคำนวณทำโดยใช้การกรองสัญญาณเชิงตัวเลขแบบแถบ (Numerical band pass filter) ตัดข้อมูลในช่วงความถี่ 10-12 kHz มาใช้ และทำการแปลงฟูริเยร์ผกผัน ให้อยู่ในเทอมของเวลาของสัญญาณที่ทดลองได้สามสัญญาณ แล้วนำไปแยกสัญญาณออกเป็นสามอันดับด้วยสมการ (7) ซึ่งจะได้สัญญาณออกมาสามอันดับของอนุกรมของวอลเตอร์รา แล้วจึงนำไปคำนวณหาค่าของพารามิเตอร์ไม่เชิงเส้นตามสมการ (18) ได้  $\beta = 5.4275 \times 10^{-9}$  N/m<sup>2</sup> ซึ่งมีค่าต่ำ แสดงว่าฐานนิยมที่นำมาคำนวณนี้มีความไม่เป็นเชิงเส้นแบบควอดราติกน้อย ซึ่งโดยธรรมชาติแล้วสปริงจะมีความไม่เชิงเส้นในลักษณะของสมการกำลังเลขคู่เนื่องจากสปริงมีการยืดและหด ทิศทางของแรงจะเปลี่ยนตามทิศทางของการเคลื่อนที่ด้วยแต่เทอมสมการกำลังสองของสมการควอดราติกแรงจะเป็นบวกเสมอเนื่องจากค่าของ  $\beta$  คูณกับ  $y^2(t)$  ไม่ว่า  $y(t)$  จะมีค่าเป็นบวกหรือลบแรงก็จะเป็นบวกเสมอ ดังนั้นเมื่อวัดค่า  $\beta$  ของระบบจริงออกมาจึงได้ค่าต่ำก็ถือว่าสอดคล้องกับทฤษฎี

## 5. สรุปผล

จากการทดสอบความถูกต้องทางทฤษฎีแสดงให้เห็นว่าการคำนวณค่าพารามิเตอร์ไม่เชิงเส้นได้ค่าที่ถูกต้องตามค่าเริ่มต้นที่ตั้งไว้ อย่างไรก็ตามในการคำนวณได้ทำการคำนวณค่าของความผิดพลาดไว้ซึ่งพบว่าค่าของความผิดพลาดมีค่าน้อยมากคือมีค่าเท่ากับ  $1.0842 \times 10^{-17}$  % ซึ่งค่าของความผิดพลาดนี้เกิดจากการทำการประสานอย่างเร็วในสมการ (14) ซึ่งต้องทำการแปลงฟูริเยร์แบบตรงและแบบผกผันถึงสองครั้งจึงทำให้เกิดความผิดพลาดจากการคำนวณบ้างเล็กน้อยและผลจากการทดสอบทางทฤษฎีนี้ทำให้เห็นว่าวิธีการหาค่าพารามิเตอร์ไม่เชิงเส้นด้วยวิธีนี้เชื่อถือได้

สำหรับการหาพารามิเตอร์ไม่เชิงเส้นในทางปฏิบัติ ได้ทำการวัดสัญญาณจากไมโครโฟน พบว่าค่าพารามิเตอร์ไม่เชิงเส้นมีค่า  $\beta = 5.4275 \times 10^{-9}$  N/m<sup>2</sup> ซึ่งมีค่าต่ำและสอดคล้องกับทฤษฎี เนื่องจากระบบทางฟิสิกส์แรงของสปริงจะมีการเปลี่ยนทิศตามระยะกระจัดแต่  $\beta$  เป็นเทอมที่คูณกับ  $y^2(t)$  จึงทำให้แรงไม่มีการเปลี่ยนทิศ ด้วยเหตุนี้ค่าของ  $\beta$  จึงมีค่าน้อย

## กิตติกรรมประกาศ

ผู้วิจัยขอขอบพระคุณ ห้องปฏิบัติการเสียงและการสั่นสะเทือน (Sound and Vibration Engineering Laboratory, SVEL) ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกลและการบินอวกาศ คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ ที่ให้ความอนุเคราะห์ในการใช้เครื่องมือในการทดสอบวัดสัญญาณ

## References

- [1] Boonmalert P, Chouychai T. The first and second order transfer function of hysteresis damping non-linear system. Kasem Bundit Engineering Journal 2019;9(1):152-65.
- [2] Chouychai T. Comportement dynamique non-Linear des structures linearization, transformee de Hilbert multidimensionnelle serie de Volterra. [these de docteur-Ingénieur]. Saint-Ouen, France: ISMCM; 1986.
- [3] Schetzen M. The Volterra & Wiener Theory of NonLinear Systems. New York: John Wiley & Sons; 1980.
- [4] Semidor-Signoret C. Comportements de Hauts polymeres a Grande Vitesse de deformation, identification d'Effet non lineaires. [These de 3eme. Cycle en mecanique physique]. Bordeaux, France: Universite de Bordeaux I; 1981.
- [5] Chapra SC, Canale RP. Numerical Methods for Engineering. 7<sup>th</sup> ed. New York: McGraw-Hill Book Company; 2015.

## ประวัติผู้เขียนบทความ



**ปริญญ บัญมาเลิศ** ปัจจุบันดำรงตำแหน่งอาจารย์ประจำสาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษมบัณฑิต โทรศัพท์ 0-2320-2777 ต่อ1203 E-mail: parinya.boo@kbu.ac.th



**ธนุ จุ้ยฉาย** ปัจจุบันดำรงตำแหน่งรองศาสตราจารย์ประจำสาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษมบัณฑิต โทรศัพท์ 0-2320-2777 ต่อ1203 E-mail: thanuchouychai@gmail.com

---

## Article History:

Received: February 22, 2020

Revised: April 17, 2020

Accepted: April 21, 2020