

การหาค่าคงที่ของสปริงแบบคิวบิกของระบบระดับความเสรี  
ชั้นเดียวไม่เชิงเส้น

PARAMETER EXTRACTION OF CUBIC SPRING OF  
NONLINEAR SDOF SYSTEM

ปริญญา บุญมาเลิศ<sup>1</sup> และ ธนู ฉุยฉาย<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup>อาจารย์, สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษมบัณฑิต

1761 ถนนพัฒนาการ เขตสวนหลวง กรุงเทพฯ 10250

<sup>1</sup>parinya.boo@kbu.ac.th, <sup>2</sup>thanuchouychai@gmail.com

Parinya Boonmalet<sup>1</sup> and Thanu Chouychai<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup>Lecturer, Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering,

Kasem Bundit University 1761 Pattanakarn Rd. Suanluang Bangkok 10250, Thailand,

<sup>1</sup>parinya.boo@kbu.ac.th, <sup>2</sup>thanu.cho@kbu.ac.th

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้ได้แสดงวิธีการหาค่าคงที่ของสปริงไม่เชิงเส้นแบบคิวบิกด้วยวิธีถดถอยแบบกำลังสองน้อยสุด โดยทำการคำนวณทั้งในโดเมนเวลาและโดเมนความถี่ซึ่งพบว่าค่าคงที่ของระบบไม่เชิงเส้นแบบคิวบิกจากการคำนวณทั้งสองแบบให้ผลลัพธ์ที่แม่นยำเหมือนกันไม่ว่าระบบจะมีการหน่วงเกินหรือระบบมีการหน่วงน้อย ในส่วนของเวลาที่ใช้ในการคำนวณพบว่าค่าการคำนวณในโดเมนเวลาที่มีความเร็วมากกว่าการคำนวณในโดเมนความถี่อยู่ประมาณ 10 % ส่วนความผิดพลาดของการคำนวณทางทฤษฎีอยู่ในระดับต่ำกว่า  $10^{-10}$ % นอกจากนี้ยังพบว่าค่าความผิดพลาดแปรผันโดยตรงกับชนิดของตัวแปรที่ใช้ สำหรับตัวแปรทศนิยมขนาดใหญ่จะมีความผิดพลาดอยู่ที่ระดับ  $10^{-10}$ % และถ้าใช้ตัวแปรทศนิยมขนาดใหญ่มากความผิดพลาดจะไม่เกิน  $10^{-12}$ %

คำสำคัญ: สปริงไม่เชิงเส้นแบบคิวบิก, การหน่วงน้อย, การหน่วงเกิน

ABSTRACT

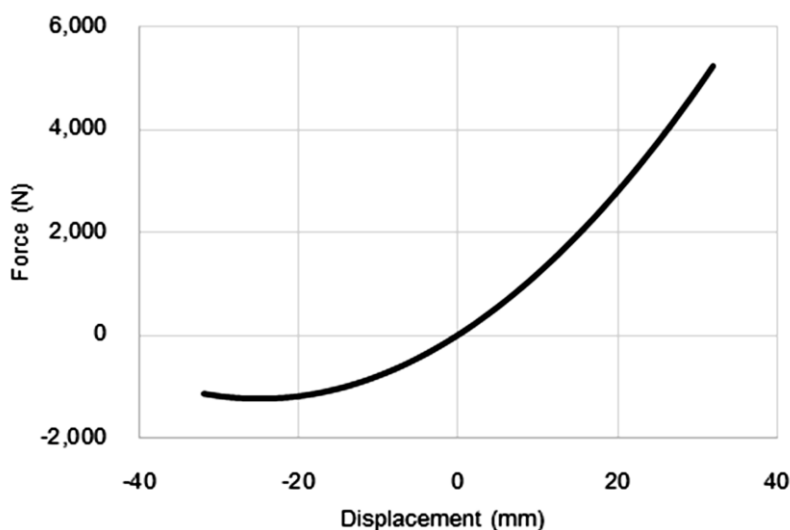
This research introduces a method for determining the parameter of cubic nonlinear springs by least square regression method. Calculations are conducted in both the time-domain and the frequency-domain. It was observed that both approaches yielded equally accurate

results, regardless of whether the system exhibited over-damping or under-damping characteristics. In terms of computational time, the time-domain calculation proved to be approximately 10% faster than the frequency-domain calculation, with a theoretical calculation error of less than  $10^{-10}\%$ . Furthermore, it was discovered that the error was directly associated with the type of variables used. When employing double variables, the error remained within the range of  $10^{-10}\%$ , while using long double variables ensured that the error did not exceed  $10^{-12}\%$ .

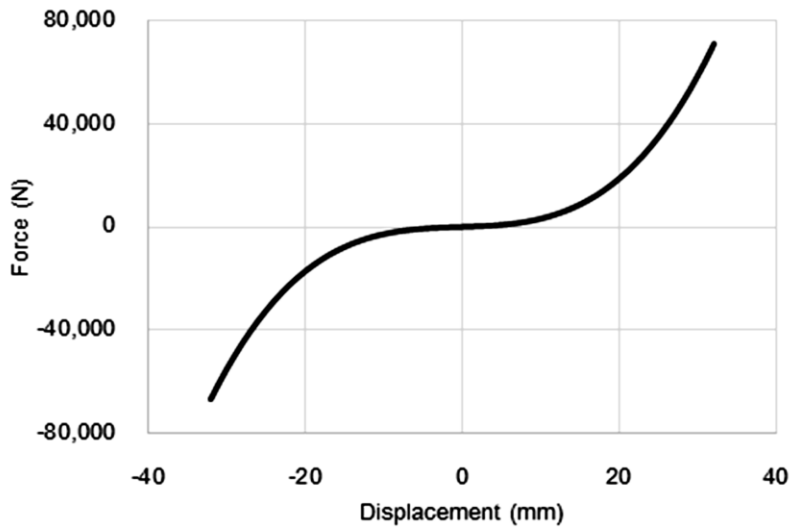
**KEYWORDS:** Cubic Nonlinear Spring, Under Damping, Over damping

## 1. บทนำ

โดยปกติแล้วแรงของสปริงจะต้องสมมูลหรือเกือบสมมูลรอบแกนระยะกระจัด แต่จากกราฟความสัมพันธ์ระหว่างแรงและระยะกระจัดของสปริงแบบควอดราติก (Quadratic Spring) จะพบว่าแรงไม่สมมาตรรอบแกนระยะกระจัดเนื่องจากแรงของสปริงในส่วนที่เป็นทอมกำลังสองจะมีค่าเป็นบวกเสมอถึงแม้ว่าระยะกระจัดจะเป็นลบ ดังแสดงในรูปที่ 1 เมื่อเทียบกับแรงที่เกิดจากสปริงแบบคิวบิก (Cubic Spring) จะพบว่าแรงของสปริงแบบคิวบิกมีความสมมาตรรอบแกนระยะกระจัดมากกว่า ดังแสดงในรูปที่ 2 ด้วยเหตุนี้งานวิจัยนี้จึงนำเสนอ การหาค่าคงที่ไม่เชิงเส้นของสปริงแบบคิวบิก โดยใช้วิธีแยกสัญญาณที่วัดได้จากระบบไม่เชิงเส้นที่มีระดับความเสถียรขึ้นเดียว ที่มีตัวหน่วงแบบของเหลวหนืดและมีสปริงไม่เชิงเส้นแบบคิวบิก โดยทำการคำนวณทั้งในโดเมนเวลาและโดเมนความถี่ เพื่อใช้เป็นแนวทางในการหาค่าพารามิเตอร์ของสปริงของระบบทางฟิสิกส์ต่อไป



รูปที่ 1 สปริงแบบควอดราติก  $F_x(t) = ky(t) + \beta y^2(t)$



รูปที่ 2 สปริงแบบคิวบิก  $F_k(t) = ky(t) + \beta y^2(t) + \gamma y^3(t)$

## 2. งานที่เกี่ยวข้อง

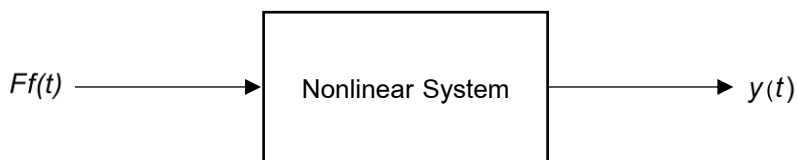
Boonmalert and Chouychai [1] ได้นำเสนอการหาพารามิเตอร์ไม่เชิงเส้นของระบบที่มีสปริงแบบควอดราติกในโดเมนของเวลา และได้ทำการทดสอบใช้จริงกับระบบทางฟิสิกส์ และพบว่าค่าความแข็งตึงไม่เชิงเส้นกำลังสองมีค่าต่ำมาก

Dong et al [2] ได้ศึกษาระบบไม่เชิงเส้นมวลสปริงและตัวหน่วงของการชนของรถไฟโดยใช้แบบจำลอง CLGAN

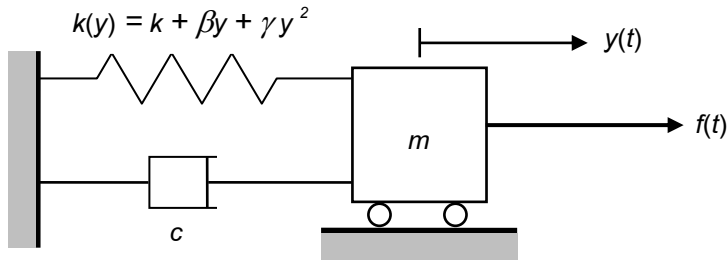
Peeters et al [3] ได้แนะนำวิธีการหาพารามิเตอร์ของระบบแบบหลายสัญญาณเข้าและหลายสัญญาณออกในโดเมนของความถี่ที่ใช้ชื่อว่า PolyMAX ซึ่งให้ผลลัพธ์ที่มีความเสถียร

Xie et al [4] ได้ศึกษาระบบไม่เชิงเส้นที่เกิดจากการไหลของอากาศที่ไม่เป็นเชิงเส้น โดยใช้ระเบียบวิธีของการแกว่งกวัด (Galerkin Method) และทฤษฎีแผ่นแบนของวอน คาร์มาน (Von Karman Plate Theory)

## 3. ทฤษฎี



รูปที่ 3 ระบบไม่เชิงเส้นระดับความเสถียรขึ้นเดียว



รูปที่ 4 ระบบที่ใช้ในการทดสอบ

งานวิจัยนี้จะอ้างอิงจากระบบระดับความเสี่งั้นเดียวที่มีตัวหน่วงแบบของเหลวหนืดและมีสปริงไม่เชิงเส้นแบบคิวบิก (Cubic Spring) ดังแสดงในรูปที่ 3 และ 4 โดยมีสมการของการเคลื่อนที่ของระบบเป็น

$$m\ddot{y}(t) + c\dot{y}(t) + ky(t) + \beta y^2(t) + \gamma y^3(t) = Ff(t) \quad (1)$$

ที่  $F = 1$  สัญญาณออกของระบบในรูปของอนุกรมของวอลเตอร์รา (Volterra Series) [5] เป็น

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n(t) \quad (2)$$

โดยที่

$$y_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} h_n(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) \prod_{i=1}^n f(t - \tau_i) d\tau_i \quad (3)$$

$n$  time

และที่  $F \neq 1$  สัญญาณออกของระบบในรูปของอนุกรมของวอลเตอร์ราเป็น

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^n y_n(t) \quad (4)$$

เมื่อแทนสมการ (4) ในสมการ (1) ได้

$$\begin{aligned} m \sum_{n=1}^{\infty} F^n \ddot{y}_n(t) + c \sum_{n=1}^{\infty} F^n \dot{y}_n(t) + k \sum_{n=1}^{\infty} F^n y_n(t) + \beta \sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{\infty} F^{(n_1+n_2)} y_{n_1}(t) y_{n_2}(t) \\ + \gamma \sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{\infty} \sum_{n_3=1}^{\infty} F^{(n_1+n_2+n_3)} y_{n_1}(t) y_{n_2}(t) y_{n_3}(t) = Ff(t) \end{aligned} \quad (5)$$

สัญญาณออกแต่ละอันดับของอนุกรมของวอลเตอร์รา หาได้จากการเทียบสัมประสิทธิ์ของ  $F$

$$\text{ที่ } F^1 \text{ ได้} \quad m\ddot{y}_1(t) + c\dot{y}_1(t) + ky_1(t) = f(t) \quad (6)$$

$$\text{หรือ} \quad y_1(t) = H_1[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\tau)f(t-\tau)d\tau \quad (7)$$

โดยที่  $H_1[\ ]$  เป็นโอเปอเรเตอร์ (operator) อันดับหนึ่งของระบบเชิงเส้น

$$\text{ที่ } F^2 \text{ ได้} \quad m\ddot{y}_2(t) + c\dot{y}_2(t) + ky_2(t) + \beta y_1^2(t) = 0 \quad (8a)$$

$$m\ddot{y}_2(t) + c\dot{y}_2(t) + ky_2(t) = -\beta y_1^2(t) \quad (8b)$$

$$y_2(t) = -\beta H_1[y_1^2(t)] \quad (8c)$$

$$\text{ที่ } F^3 \text{ ได้} \quad m\ddot{y}_3(t) + c\dot{y}_3(t) + ky_3(t) + 2\beta y_1(t)y_2(t) + \gamma y_1^3(t) = 0 \quad (9a)$$

$$m\ddot{y}_3(t) + c\dot{y}_3(t) + ky_3(t) = -2\beta y_1(t)y_2(t) - \gamma y_1^3(t) \quad (9b)$$

$$y_3(t) = -H_1[2\beta y_1(t)y_2(t) + \gamma y_1^3(t)] \quad (9c)$$

$$\text{และที่ } F^4 \text{ ได้} \quad m\ddot{y}_4(t) + c\dot{y}_4(t) + ky_4(t) + 2\beta y_1(t)y_3(t) + \beta y_2^2(t) + 3\gamma y_1^2(t)y_2(t) = 0 \quad (10a)$$

$$m\ddot{y}_4(t) + c\dot{y}_4(t) + ky_4(t) = -2\beta y_1(t)y_3(t) - \beta y_2^2(t) - 3\gamma y_1^2(t)y_2(t) \quad (10b)$$

$$y_4(t) = -H_1[2\beta y_1(t)y_3(t) + \beta y_2^2(t) + 3\gamma y_1^2(t)y_2(t)] \quad (10c)$$

ในการหาค่าคงที่ไม่เชิงเส้นจะหาได้จาก  $y_3(t)$  แต่เพื่อป้องกันสัญญาณอันดับที่สูงกว่า 3 เข้ามา รบกวนจึงทำการแยกสัญญาณออกเป็น 4 อันดับ ถ้า  $y_1(t)$ ,  $y_2(t)$ ,  $y_3(t)$  และ  $y_4(t)$  หาได้จากการ ทดลองด้วยการใส่สัญญาณ  $Ff(t)$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$  เข้าสู่ระบบสี่ครั้ง โดยที่แต่ละครั้งมีแอมพลิจูดของ แรงแตกต่างกัน จะแยกสัญญาณทั้งสี่อันดับของวอลเตอร์รา [6] ได้จากสมการ (4) ในรูปเมตริกเป็น

$$\begin{Bmatrix} y^{(1)}(t) \\ y^{(2)}(t) \\ y^{(3)}(t) \\ y^{(4)}(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1^1 & F_1^2 & F_1^3 & F_1^4 \\ F_2^1 & F_2^2 & F_2^3 & F_2^4 \\ F_3^1 & F_3^2 & F_3^3 & F_3^4 \\ F_4^1 & F_4^2 & F_4^3 & F_4^4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \\ y_4(t) \end{Bmatrix} \quad (11)$$

โดยที่  $y^{(i)}(t)$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$  คือสัญญาณออกของระบบที่เกิดสัญญาณเข้า  $F_i f(t)$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$  สัญญาณออกของระบบลำดับต่าง ๆ ที่ได้จากการวัดสัญญาณเมื่อเทียบกับสัญญาณทางทฤษฎีเป็น

$$y_1(t) = H_1[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\tau) f(t - \tau) d\tau \quad (12)$$

$$y_2(t) = -\beta H_1[y_1^2(t)] = -\beta \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\tau) y_1^2(t - \tau) d\tau \quad (13)$$

$$y_3(t) = -H_1[2\beta y_1(t)y_2(t) + \gamma y_1^3(t)] \quad (14a)$$

$$y_3(t) = -2\beta \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\tau) y_1(t - \tau) y_2(t - \tau) d\tau - \gamma \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\tau) y_1^3(t - \tau) d\tau \quad (14b)$$

หรือ 
$$y_3(t) = -2\beta y_{3\beta}(t) - \gamma y_{3\gamma}(t) \quad (14c)$$

โดยที่ 
$$y_{3\beta}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\tau) y_1(t - \tau) y_2(t - \tau) d\tau \quad (15a)$$

และ 
$$y_{3\gamma}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\tau) y_1^3(t - \tau) d\tau \quad (15b)$$

ถ้า  $y_3(t)$  เป็นสัญญาณที่คำนวณได้จากสมการ (11) จะเห็นว่าสัญญาณอันดับที่สาม สามารถคำนวณหาค่าคงที่ไม่เชิงเส้นของสปริงได้ทั้งสองค่า จึงใช้สัญญาณอันดับสามคำนวณหาค่าคงที่ไม่เชิงเส้นของระบบ ความผิดพลาดระหว่างทฤษฎีกับการทดลองจะหาได้จาก

$$E(t) = y_3(t) + 2\beta y_{3\beta}(t) + \gamma y_{3\gamma}(t) \quad (16)$$

เมื่อกำหนดให้  $t = k\Delta t$  ซึ่งจะทำให้หาค่าคงที่ไม่เชิงเส้นของสปริงได้โดยใช้วิธีถดถอยแบบกำลังสองน้อยสุด (Least Squares Regression) [7] ดังนี้

$$R = \sum_{k=1}^N E^2(k) = \sum_{k=1}^N \left[ y_3(k) + 2\beta y_{3\beta}(k) + \gamma y_{3\gamma}(k) \right]^2 \quad (17)$$

สามารถหาอนุพันธ์ของ  $R$  เทียบกับ  $\beta$  และ  $\gamma$  ได้เป็น

$$\frac{\partial R}{\partial \beta} = 4 \sum_{k=1}^N \left[ y_3(k) + 2\beta y_{3\beta}(k) + \gamma y_{3\gamma}(k) \right] y_{3\beta}(k) = 0 \quad (18a)$$

$$\frac{\partial R}{\partial \gamma} = 2 \sum_{k=1}^N \left[ y_3(k) + 2\beta y_{3\beta}(k) + \gamma y_{3\gamma}(k) \right] y_{3\gamma}(k) = 0 \quad (18b)$$

และจัดให้อยู่ในรูปแบบเมทริกซ์ได้เป็น

$$\begin{bmatrix} \sum_{k=1}^N y_{3\beta}^2(k) & \sum_{k=1}^N y_{3\beta}(k)y_{3\gamma}(k) \\ \sum_{k=1}^N y_{3\beta}(k)y_{3\gamma}(k) & \sum_{k=1}^N y_{3\gamma}^2(k) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 2\beta \\ \gamma \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \sum_{k=1}^N y_3(k)y_{3\beta}(k) \\ \sum_{k=1}^N y_3(k)y_{3\gamma}(k) \end{Bmatrix} \quad (19)$$

โดยค่าของ  $\beta$  และ  $\gamma$  จะสามารถคำนวณหาได้จากสมการ (19)

สำหรับโดเมนความถี่ ในกรณีที่ระบบมีค่าของตัวหน่วงเกิน สัญญาณในโดเมนเวลาจะลดเป็นศูนย์อย่างรวดเร็ว ทำให้ข้อมูลที่ใช้ในการคำนวณหาค่าคงที่ของสปริงมีค่าน้อย จึงทำให้ระบบที่มีค่าของตัวหน่วงเกินจะมีข้อมูลของสัญญาณในโดเมนความถี่มากกว่าในโดเมนเวลา ดังนั้นค่าของ  $\beta$  และ  $\gamma$  ที่คำนวณในโดเมนความถี่จะทำได้โดย พิจารณาสมการ (14) ถ้าให้  $u_\beta(t) = y_1(t)y_2(t)$  และ  $u_\gamma(t) = y_1^3(t)$  ดังนั้นสัญญาณออกอันดับที่สามของวอลเตอร์ราเป็น

$$y_3(t) = -2\beta \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\tau)u_\beta(t-\tau)d\tau - \gamma \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\tau)u_\gamma(t-\tau)d\tau \quad (20)$$

และสัญญาณออกอันดับที่สามในโดเมนความถี่ได้

$$Y_3(f) = -2\beta H_1(f)U_\beta(f) - \gamma H_1(f)U_\gamma(f) \quad (21a)$$

$$Y_3(f) = -2\beta Y_{3\beta}(f) - \gamma Y_{3\gamma}(f) \quad (21b)$$

โดยที่  $Y_{3\beta}(f) = H_1(f)U_\beta(f) \quad (22a)$

และ  $Y_{3\gamma}(f) = H_1(f)U_\gamma(f) \quad (22b)$

ถ้า  $Y_3(f)$  เป็นสัญญาณที่วัดได้จากสมการ (11) ความผิดพลาดของสัญญาณที่ได้จากการวัดสัญญาณและทฤษฎีคือ

$$E(f) = Y_3(f) + 2\beta Y_{3\beta}(f) + \gamma Y_{3\gamma}(f) \quad (23)$$

การหาค่าของ  $\beta$  และ  $\gamma$  จะสามารถหาได้โดยวิธีลดถอยแบบกำลังสองน้อยสุด

$$R = \sum_{k=1}^N E^*(k)E(k) \quad (24a)$$

$$R = \sum_{k=1}^N \left[ Y_3(k) + 2\beta Y_{3\beta}(k) + \gamma Y_{3\gamma}(k) \right]^* \left[ Y_3(k) + 2\beta Y_{3\beta}(k) + \gamma Y_{3\gamma}(k) \right] \quad (24b)$$

โดยที่  $( )^*$  คือ สังกะยัฒน์ (complex conjugate) และ  $f = k\Delta f$

สามารถหาอนุพันธ์ของ  $R$  เทียบกับ  $\beta$  และ  $\gamma$  ได้เป็น

$$\frac{\partial R}{\partial \beta} = 2 \sum_{k=1}^N \left\{ \left[ Y_3(k) + 2\beta Y_{3\beta}(k) + \gamma Y_{3\gamma}(k) \right]^* Y_{3\beta}(k) + \left[ Y_3(k) + 2\beta Y_{3\beta}(k) + \gamma Y_{3\gamma}(k) \right] Y_{3\beta}^*(k) \right\} = 0 \quad (25a)$$



$$\frac{\partial R}{\partial \gamma} = \sum_{k=1}^N \left\{ \left[ Y_3(k) + 2\beta Y_{3\beta}(k) + \gamma Y_{3\gamma}(k) \right]^* Y_{3\gamma}(k) + \left[ Y_3(k) + 2\beta Y_{3\beta}(k) + \gamma Y_{3\gamma}(k) \right] Y_{3\gamma}^*(k) \right\} = 0 \quad (25b)$$

สามารถจัดอยู่ในรูปแบบเมทริกซ์ได้เป็น

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 2\sum_{k=1}^N |Y_{3\beta}(k)|^2 & \sum_{k=1}^N \left[ Y_{3\gamma}^*(k) Y_{3\beta}(k) + Y_{3\gamma}(k) Y_{3\beta}^*(k) \right] \\ \sum_{k=1}^N \left[ Y_{3\gamma}^*(k) Y_{3\beta}(k) + Y_{3\gamma}(k) Y_{3\beta}^*(k) \right] & 2\sum_{k=1}^N |Y_{3\gamma}(k)|^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 2\beta \\ \gamma \end{pmatrix} \\ & = - \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^N \left[ Y_3^*(k) Y_{3\beta}(k) + Y_3(k) Y_{3\beta}^*(k) \right] \\ \sum_{k=1}^N \left[ Y_3^*(k) Y_{3\gamma}(k) + Y_3(k) Y_{3\gamma}^*(k) \right] \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (26)$$

โดยที่  $|Y(f)|^2 = Y^*(f)Y(f) = Y(f)Y^*(f)$  (27)

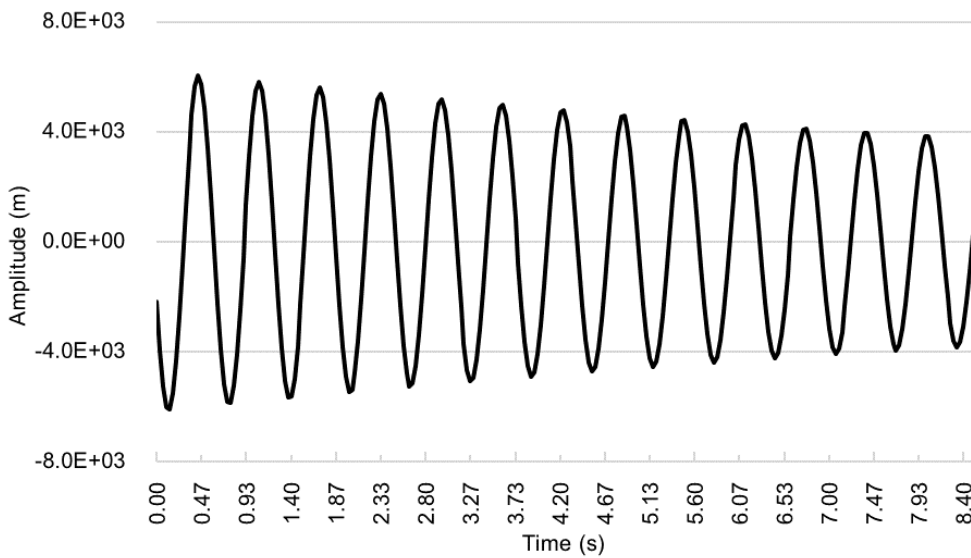
ทำให้สามารถหาค่าของ  $\beta$  และ  $\gamma$  ได้จากสมการ (26)

#### 4. ผลการคำนวณ

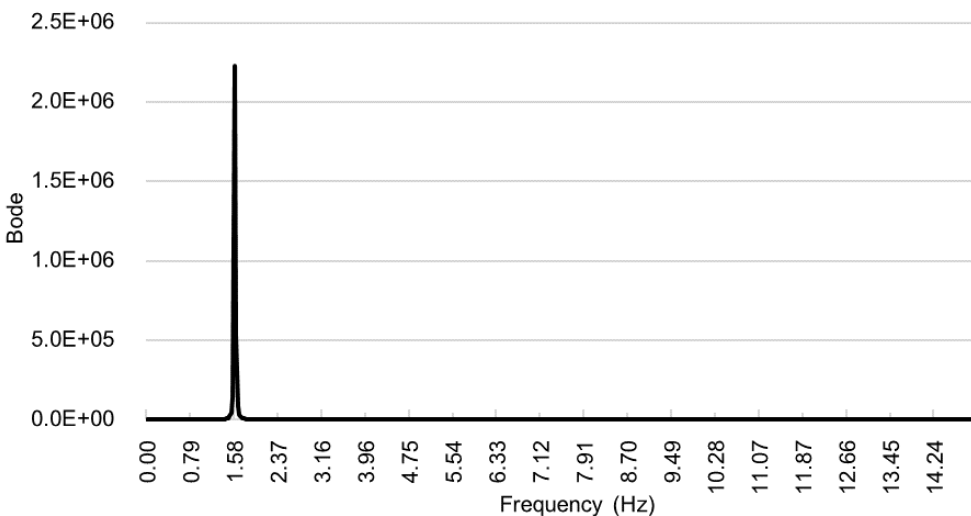
ในการทดสอบความถูกต้องของการคำนวณหาค่าคงที่ของสปริงทั้งสองแบบ จะทำการคำนวณจากระบบในสมการ (1) โดยกำหนดให้  $m = 1 \text{ kg}$ ,  $c = 2 \text{ N.s/m}$ , และ  $k = 100 + 2y(t) + 5y^2(t) \text{ N/m}$  ผลการคำนวณหาค่า  $\beta$  และ  $\gamma$  จากสมการ (19) และ (26) ได้ค่า  $\beta = 2$  และ  $\gamma = 5$  ถูกต้องเหมือนกัน นอกจากนี้ได้ทำการทดสอบโดยการปรับเปลี่ยนค่าของตัวหน่วง  $\zeta = \frac{c}{2m\omega_n}$  โดยใน

การคำนวณทดสอบในช่วง  $0.00 \leq \zeta \leq 0.95$  พบว่าสามารถคำนวณหาค่า  $\beta$  และ  $\gamma$  ได้ถูกต้องทุกค่าของ  $\zeta$  โดยในรูปที่ 5 และ 6 เป็นสัญญาณออกของระบบในโดเมนเวลาและโดเมนความถี่ที่มีค่า  $\zeta = 0.0005$  ตามลำดับ ซึ่งจะพบว่าสัญญาณออกของระบบในโดเมนเวลามีข้อมูลที่จะใช้ในการคำนวณมากกว่าสัญญาณออกของระบบในโดเมนความถี่ ในรูปที่ 7 เป็นสัญญาณออกของระบบในโดเมนเวลาที่มีค่า  $\zeta = 0.95$  ซึ่งจะพบว่าสัญญาณออกของระบบในโดเมนเวลาจะลดลงเป็นศูนย์อย่างรวดเร็ว แต่สัญญาณออกของระบบในโดเมนความถี่ในรูปที่ 8 จะมีข้อมูลที่ใช้ในการคำนวณมากกว่า ซึ่งสอดคล้องกับรูปที่ 9 ที่แสดงความผิดพลาดจากการคำนวณหาค่า  $\beta$  และ  $\gamma$  ในโดเมน

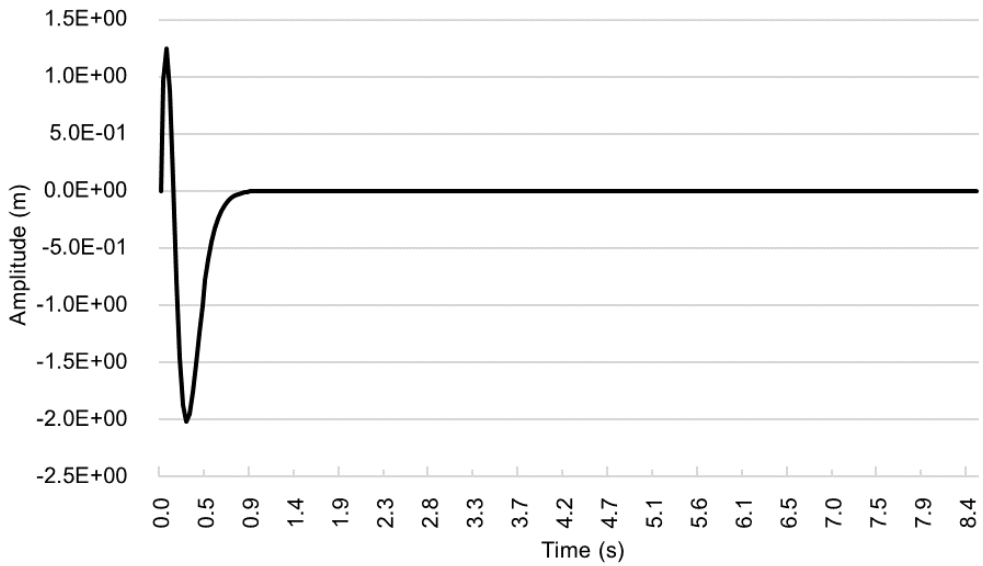
เวลาโดยใช้สมการ (19) จะพบว่าความผิดพลาดจากการคำนวณที่ค่าความหน่วงน้อยจะมีความผิดพลาดน้อยกว่าระบบที่มีค่าความหน่วงเกิน แต่ในทางกลับกันถ้าใช้การคำนวณหาค่า  $\beta$  และ  $\gamma$  ในโดเมนความถี่ด้วยสมการ (27) ความผิดพลาดจากการคำนวณ ระบบที่มีตัวหน่วงน้อยจะมีความผิดพลาดมากกว่าระบบที่มีค่าความหน่วงเกิน ดังแสดงในรูปที่ 10 แต่อย่างไรก็ตามความผิดพลาดสูงสุดของการคำนวณทั้งสองวิธีก็มีย่าน้อยมากในระดับ  $9 \times 10^{-10}\%$  ซึ่งถือว่าน้อยมากจนเป็นที่ยอมรับได้



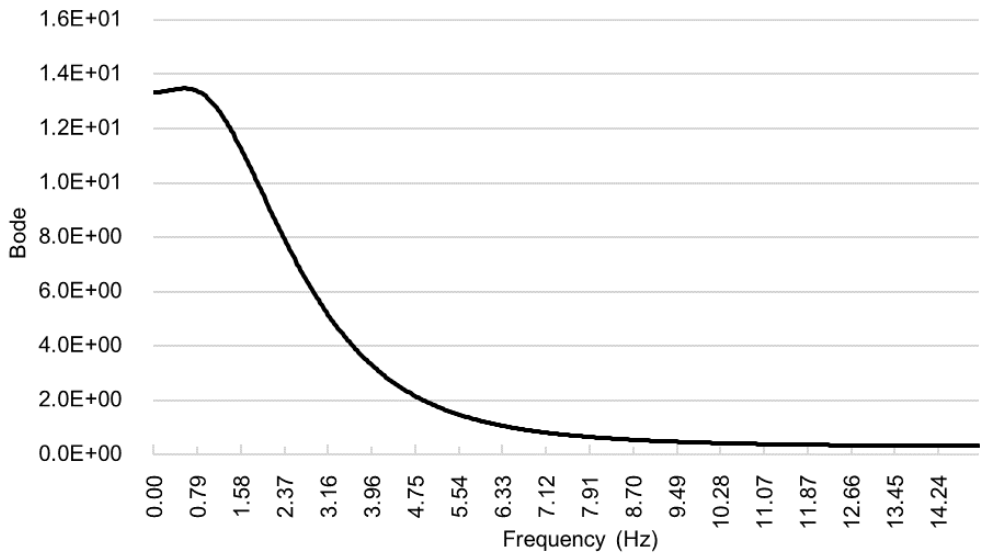
รูปที่ 5 สัญญาณออกของระบบในโดเมนเวลา ที่  $\zeta = 0.0005$



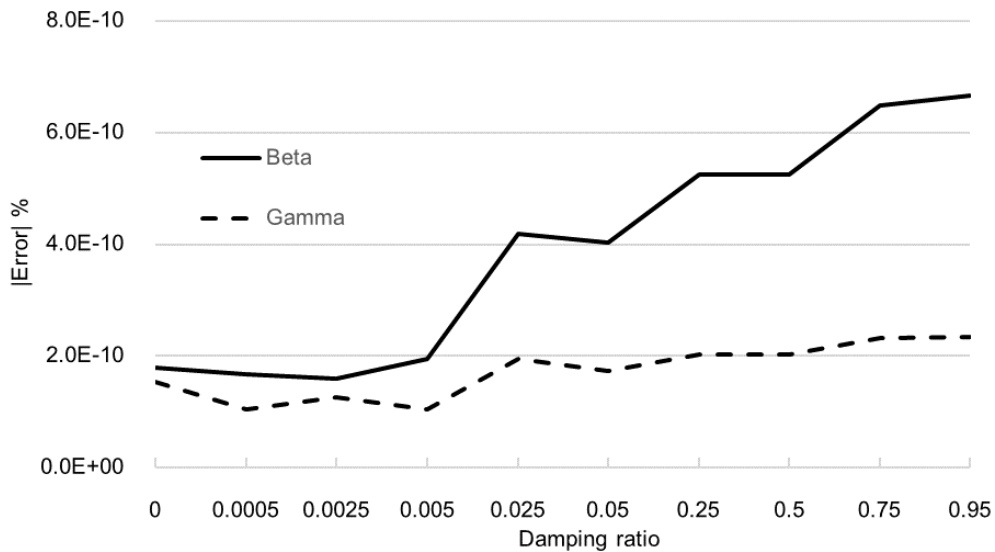
รูปที่ 6 สัญญาณออกของระบบในโดเมนความถี่ ที่  $\zeta = 0.0005$



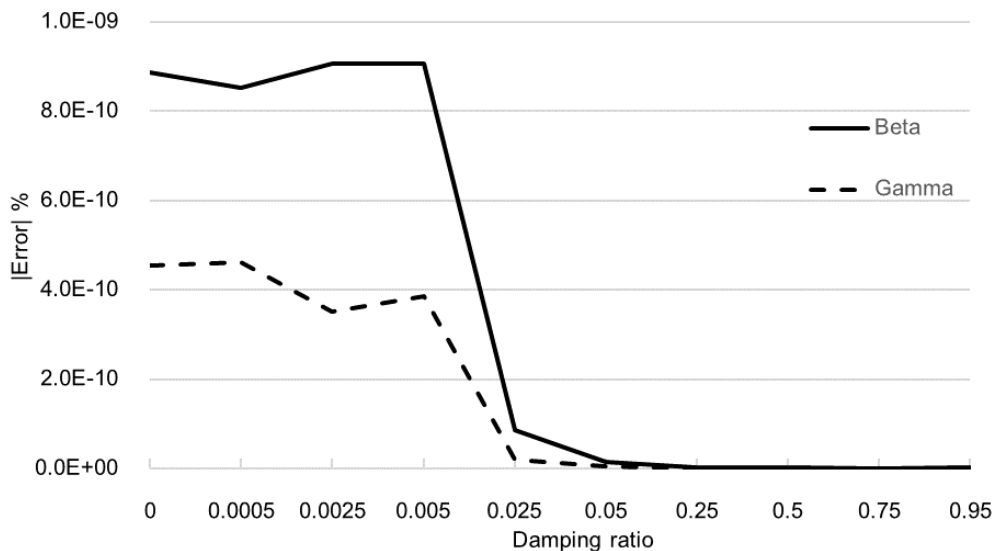
รูปที่ 7 สัญญาณออกของระบบในโดเมนเวลา ที่  $\zeta = 0.95$



รูปที่ 8 สัญญาณออกของระบบในโดเมนความถี่ ที่  $\zeta = 0.95$



รูปที่ 9 ความผิดพลาดจากการคำนวณ  $\beta$  และ  $\gamma$  ในโดเมนเวลา



รูปที่ 10 ความผิดพลาดจากการคำนวณ  $\beta$  และ  $\gamma$  ในโดเมนความถี่

## 5. สรุป

จากการทดสอบพบว่าค่าความหน่วงไม่ว่าจะเป็นการหน่วงเกิน (Over Damping) หรือการหน่วงน้อย (Under Damping) ไม่มีผลทำให้การคำนวณมีความผิดพลาดแต่ประการใด แต่ในทางปฏิบัติสัญญาณรบกวนอาจส่งผลต่อความผิดพลาดของการคำนวณได้ ดังนั้นจึงขอแนะนำ

ว่าถ้าพบวาระบบมีการหน่วงเกิน ก็ควรใช้การคำนวณในโดเมนความถี่ แต่ถ้าพบว่าสัญญาณที่วัดได้มีการหน่วงน้อย ซึ่งสามารถสังเกตได้จากตำแหน่งความถี่ธรรมชาติของฟังก์ชันถ่ายโอนที่แสดงในรูปของโบด (Bode plot) ก็สามารถใช้การคำนวณในโดเมนเวลาได้ ซึ่งจะใช้เวลาในการคำนวณได้น้อยกว่า เนื่องจากโดยปกติแล้วการวัดสัญญาณจะทำในโดเมนเวลาอยู่แล้ว ถ้าต้องการคำนวณในโดเมนความถี่จะต้องใช้การแปลงฟูริเยร์เพื่อแปลงสัญญาณให้เป็นโดเมนความถี่เสียก่อน จึงจะสามารถทำการคำนวณตามสมการ (26) ได้ ทำให้การคำนวณในโดเมนความถี่ใช้เวลามากกว่า สำหรับการแปลงฟูริเยร์ที่ใช้ในงานวิจัยนี้ เป็นการแปลงฟูริเยร์แบบตรง (Direct Fourier Transform) สำหรับการแปลงแบบเทอมแท้จริงให้เป็นเทอมเชิงซ้อน (Real to Complex) และการแปลงฟูริเยร์ผกผัน (Inverse Fourier Transform) สำหรับการแปลงแบบเทอมเชิงซ้อนเป็นเทอมแท้จริง (Complex to Real) ซึ่งพบว่าการคำนวณในโดเมนเวลามีความเร็วกว่าการคำนวณในโดเมนความถี่อยู่ประมาณ 10%

## References

- [1] Boonmalert P, Chouychai T. Nonlinear parameter extraction of SDOF viscous damping system. *Kasem Bundit Engineering Journal* 2020;10(1):81-92. (In Thai).
- [2] Dong S, Tang Z, Yang X, Wu M, Zhang J, Zhu T, et al. Nonlinear spring-mass-damper modeling and parameter estimation of train frontal crash using CLGAN model. *Shock and Vibration* 2020;2020:9536915. doi:10.1155/2020/9536915.
- [3] Peeters B, Auweraer H, Guillaume P, Leuridan J. The PolyMAX frequency-domain method: a new standard for modal parameter estimation?. *Shock and Vibration* 2004;11:395-409.
- [4] Xie D, Xu M, Dai H, Chen T. New look at nonlinear aerodynamics in analysis of hypersonic panel flutter. *Mathematical Problems in Engineering* 2017;2017:6707092. doi:10.1155/2017/6707092.
- [5] Schetzen M. *The Volterra & Wiener theory of nonlinear systems*. New York: John Wiley & Sons; 1980.
- [6] Semidor-Signoret C. *Comportements de hauts polymeres a grande vitesse de deformation, identification d'effet non lineares*. [These de 3eme. Cycle en mecanique physique]. Bordeaux, France: Universite de Bordeaux I; 1981.
- [7] Chapra SC, Canale RP. *Numerical methods for engineering*. 7th ed. New York: McGraw-Hill Book; 2015.

**ประวัติผู้เขียนบทความ**

**ปริญญา บุญมาเลิศ** ปัจจุบันดำรงตำแหน่งอาจารย์ประจำสาขาวิชา  
วิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษมบัณฑิต โทรศัพท์  
0-2320-2777 ต่อ1203 E-mail: parinya.boo@kbu.ac.th



**ธนู ฉวยฉาย** ปัจจุบันดำรงตำแหน่งอาจารย์ประจำสาขาวิชา  
วิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษมบัณฑิต  
โทรศัพท์ 0-2320-2777 ต่อ 1203 E-mail: thanu.cho@kbu.ac.th

---

**Article History:**

Received: September 25, 2023

Revised: February 7, 2024

Accepted: February 26, 2024